

1. ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА

1.1. Матрици. Видове матрици. Действия с матрици

Матрица се нарича правоъгълна таблица от реални числа, разположени в m реда и n стълба и се състои от $m \times n$ на брой елементи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Елементите на матрицата се означават с a_{ij} ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$). Съкратено матрицата се означава $A(m \times n)$ или $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

1.1.1. Видове матрици

В общия случай, когато $m \neq n$, матриците от вида $A(m \times n)$ се наричат правоъгълни, а когато $m = n$, те се наричат **квадратни матрици** от n -ти ред. Означават се $A(n \times n)$ и имат вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементите с равни индекси a_{ii} , $i = 1, \dots, n$ образуват **главен диагонал** на квадратната матрица A . Елементите $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ образуват **втори диагонал**.

Една квадратна матрица от n -ти ред се нарича **долно триъгълна** (или **горно триъгълна**), когато всички елементи **под** (или **над**) диагонала са нули.

Квадратна матрица, на която всички елементи извън главния диагонал са равни на нула, се нарича **диагонална матрица**.

Квадратна диагонална матрица с единици по главния диагонал се нарича **единична матрица** и се бележи с E .

Квадратна матрица от n -ти ред $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$ се нарича **симетрична**, ако $a_{ij} = a_{ji}$.

Една матрица $A(m \times n)$, чиито елементи са нули, се нарича **нулева** матрица. Правоъгълна матрица с един ред (стълб) се нарича **вектор-ред** (**вектор-стълб**).

1.1.2. Действия с матрици

Сума на две $(m \times n)$ матрици $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ се нарича трета $(m \times n)$ матрица $C = (c_{ij})$, където $C = (a_{ij} + b_{ij})$ и се означава $C = A + B$.

Свойства на събирането на матрици:

Свойство 1:

$$(1.1) \quad A + B = B + A \text{ (комутативност);}$$

Свойство 2:

$$(1.2) \quad A + (B + C) = (A + B) + C \text{ (асоциативност).}$$

Произведение на $(m \times n)$ матрицата $A = (a_{ij})$ с реалното число λ се нарича $(m \times n)$ матрицата $C = (\lambda a_{ij})$ и се означава $C = \lambda A = A\lambda$.

Свойства на умножението на матрица с число:

Свойство 1:

$$(1.3) \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B ;$$

Свойство 2:

$$(1.4) \quad \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A ;$$

Свойство 3:

$$(1.5) \quad 1.A = A .$$

Разлика на две $(m \times n)$ матрици A и B е матрицата $A + (-1)B$ и се записва $A - B$.

Произведение на $(m \times n)$ матрицата $A = (a_{ij})$ и $(n \times p)$ матрицата $B = (b_{jk})$ е $(m \times p)$ матрицата $C = (c_{ik})$, $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$ и се означава $C = AB$. Елементът c_{ik} е равен на скаларното произведение от i -тия ред на A и k -тия стълб на B ,
$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} .$$